

PHÂN TÍCH ĐỘNG HỌC CƠ CẤU KHÔNG GIAN CÓ KHỚP CARDAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHIỀU VUÔNG GÓC, ỨNG DỤNG GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG HỌC NGƯỢC.

Mở đầu

Cơ cấu không gian có khớp Cardan là một cơ cấu phức tạp. Việc phân tích động học cơ cấu hiện nay có khá nhiều phương pháp, tuy nhiên nó khá phức tạp. Báo cáo này đề xuất phương pháp hình chiếu vuông góc để phân tích bài toán động học cơ cấu có khớp Cardan, giúp việc phân tích và giải quyết bài toán bớt phức tạp.

1. Cơ sở lý thuyết phân tích động học cơ cấu không gian

Mỗi cơ cấu không gian là một hệ cơ học chịu liên kết hôlônôm giữ và dừng, các điều kiện ràng buộc của nó có dạng:

$$\sum l_i = 0 \quad (1)$$

Ta sử dụng các tọa độ suy rộng đủ $q_1, q_2, q_3, \dots, q_f$. Để xác định vị trí của cơ cấu f bậc tự do. Ngoài ra ta đưa thêm vào các tọa độ suy rộng dư để dễ dàng thiết lập các biểu thức giải tích xác định vị trí của cơ cấu. Gọi $z_1, z_2, z_3, \dots, z_r$ là các tọa độ suy rộng phụ thuộc. Các phương trình liên kết có dạng:

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_f, z_1, z_2, \dots, z_r) = 0 \quad (i=1 \div r) \quad (2)$$

trong đó $z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_f)$ ($k=1 \div r$)

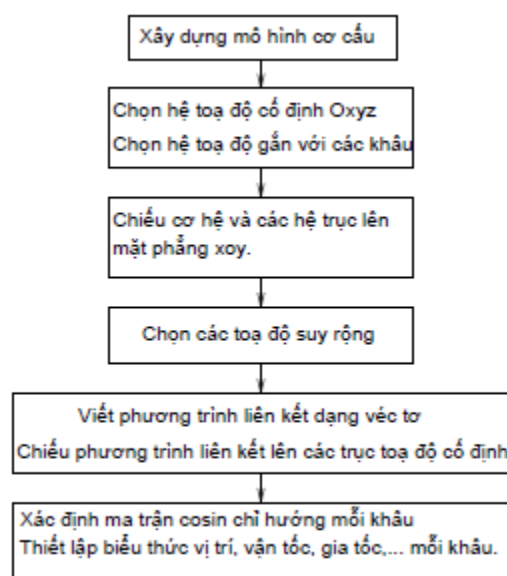
Giải hệ phương trình đại số phi tuyến (1.2) để xác định các hàm z_i và các đạo hàm bậc nhất, bậc hai của nó bằng phương pháp lặp là nhiệm vụ trung tâm của bài toán phân tích động học cơ cấu không gian.

2. Phân tích động học cơ cấu không gian bằng phương pháp hình chiếu vuông góc.

Mục tiêu của phương pháp là áp dụng phương pháp chiếu vuông góc và đưa vào các tọa độ suy rộng dư để xây dựng các phương trình liên kết của cơ cấu không gian. Hình 3.1 mô tả các bước của phương pháp hình chiếu vuông góc phân tích động học cơ cấu không gian.

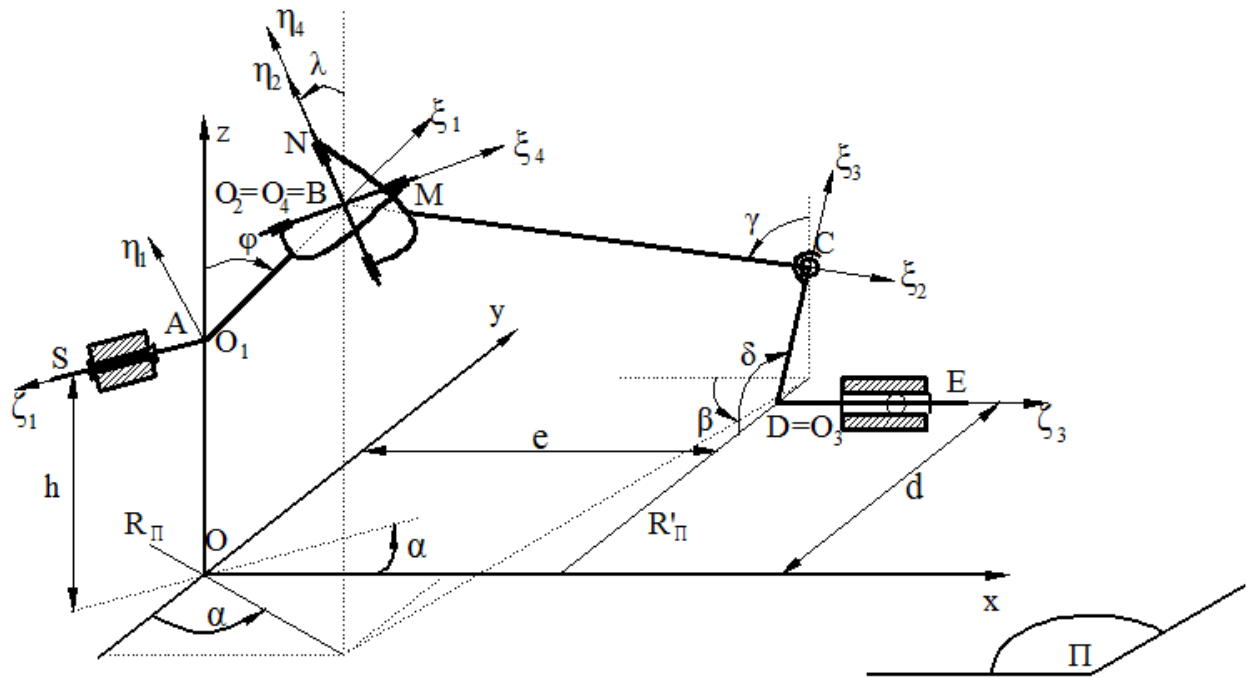
Chú ý:

- + Khi chọn hệ trục tọa độ cố định Oxyz cần theo nguyên tắc: Nếu khâu nối giá quay xung quanh trục cố định, chọn mặt xoy song song với trục quay. Nếu khâu nối giá là tịnh tiến, chọn 1 trong 2 trục x hoặc y song song với phương tịnh tiến.
- + Đối với mỗi khâu, cần xác định góc giữa hình chiếu của 2 trục tọa độ gắn với khâu và trục ox (hoặc oy), trục oz. Nếu có khớp tịnh tiến, cần chọn thêm tọa độ suy rộng là dịch chuyển dài.



3 phân tích động học cơ cấu không gian có khớp Cardan

3.1 Thành lập phương trình liên kết



Hình 1. Mô hình cơ cấu không gian có khớp cardan

Hình mô tả một cơ cấu 4 khâu có khớp Cardan hay được dùng trong kỹ thuật. Chọn AB vuông góc với SA, CD vuông góc với DE. Khâu SAB quay quanh các trục SA. Khâu BC chuyển động không gian. Khâu CD quay quanh DE. Đặt $AB=l_1$, $BC=l_2$, $CD=l_3$.

Ta chọn hệ trục vuông góc $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ gắn với khâu SAB như sau: $O_1=A$, hướng ξ_1 là hướng AB, hướng ζ_1 AS, hướng η_1 được chọn sao cho tạo thành một hệ qui chiếu thuận.

Ta xác định một mặt phẳng Π như sau: Qua điểm D vẽ một đường thẳng song song với trục quay SA của khâu 1 và một đường thẳng trùng với trục quay DE. Hai đường cắt nhau này xác định mặt phẳng Π .

Qua O_1 , vẽ một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng Π và cắt Π tại O, nói cách khác O chính là hình chiếu của O_1 lên Π .

Chọn hệ trục Oxyz với: Gốc O là hình chiếu của A lên Π , trục z hướng theo OO_1 , trục x hướng DE, trục y được chọn sao cho oxyz tạo thành một hệ qui chiếu thuận. như vậy xoy nằm trên mặt phẳng Π .

Chọn hệ tọa độ $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ gắn với BC và có $O_2=B$, ξ_2 là hướng BC. Chọn η_2 theo hướng BN, trục ζ_2 chọn sao cho hệ trục tạo thành một hệ qui chiếu thuận.

Chọn hệ tọa độ $O_3\xi_3\eta_3\zeta_3$ gắn với khâu CDE với: $O_3=D$, trục ζ_3 hướng theo DE, trục ξ_3 hướng theo DC, trục η_3 được chọn để tạo thành một hệ qui chiếu thuận.

Chọn hệ tọa độ $O_4\xi_4\eta_4\zeta_4$ gắn với khâu MBN như sau $O_4=B$, trục ξ_4 hướng theo M, η_4 hướng theo N, trục ζ_4 được chọn để tạo thành một hệ quy chiếu thuận.

Nhận xét: Khâu SAB quay quanh trục cố định SA nên luôn nằm trên mặt phẳng R đi qua A và vuông góc với trục quay SA. Mặt phẳng R chứa OA vuông góc với mặt phẳng Π . Theo tính chất phép chiếu vuông góc thì hình chiếu của mặt phẳng R lên Π là một đường thẳng R_Π , tạo với trục y một góc không đổi α . Hình chiếu của một điểm bất kỳ trên AB lên Π cũng nằm trên đường thẳng này.

Khâu CDE quay quanh trục cố định DE với CD vuông góc với DE. Trong chuyển động quay, CD luôn nằm trên mặt phẳng R' vuông góc với DE. Vì DE thuộc Π nên R' vuông góc với Π . Như vậy hình chiếu của R' lên Π là một đường thẳng R'_Π . Dễ thấy $R'_\Pi \perp DE$. Hình chiếu của một điểm bất kỳ nằm trên CD là một điểm nằm trên R'_Π .

Gọi khoảng cách giữa trục x và ζ_3 là d, khoảng cách OO_1 là h, khoảng cách từ điểm D đến trục y là e. Trong một cơ cấu cụ thể các kích thước này hoàn toàn xác định.

Theo tiêu chuẩn Gruebler ta có
$$f = \sum_{i=1}^{n_G} f_{Gi} - 6n_L - f_{th}$$

Với f_{Gi} là số bậc tự do của khớp i; n_G là số lượng khớp; n_L là số mạch vòng trong chuỗi, f_{th} là số bậc tự do thừa. Đối với cơ cấu này, tồn tại một bậc tự do chuyển động của khâu BC quay quanh trục của chính nó. Bậc tự do chuyển động này không ảnh hưởng gì đến mối quan hệ động học giữa đầu vào và đầu ra của cơ hệ. Vì vậy người ta thường gọi bậc tự do đó là bậc tự do thừa.

Ta có: $f=(1+3+3+1)-6-1=1$.

Như vậy, số bậc tự do chuyển động của cơ cấu=1.

Ta chọn tọa độ suy rộng đủ là φ , chọn các tọa độ suy rộng dư là $\beta(\varphi)$, $\gamma(\varphi)$, $\delta(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$.

Do cách chọn hệ trục tọa độ như trên góc α là hằng số, C'D luôn vuông góc với trục x, do đó có thể giảm được 2 tọa độ suy rộng nếu chọn xoy bất kỳ.

Cũng do cách chọn hệ tọa độ như trên mà BM luôn song song với mặt phẳng xoy nên góc giữa hình chiếu của BM và hình chiếu của BN lên xoy luôn vuông. Ta giảm được 2 tọa độ suy rộng nữa khi chọn oxy bất kỳ. Trong ví dụ này chúng ta có thể giảm được 4 tọa độ suy rộng dư.

Từ hình vẽ ta có phương trình ràng buộc chuyển động của cơ cấu dạng véc tơ:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = 0 \quad (3.1)$$

Điều kiện BM vuông góc với BC:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (3.2)$$

Chiếu lên các trục tọa độ xyz ta được các phương trình:

$$\begin{aligned} f_1 &= l_1 \sin \varphi \sin \alpha + l_2 \cos \beta \sin \gamma - e = 0 \\ f_2 &= -l_1 \sin \varphi \cos \alpha + l_2 \sin \beta \sin \gamma - l_3 \sin \delta - d = 0 \\ f_3 &= h + l_1 \cos \varphi - l_2 \cos \gamma - l_3 \cos \delta = 0 \\ f_4 &= -\sin \alpha \cos \beta \sin \delta \sin \lambda + \cos \alpha \sin \beta \sin \delta \sin \lambda - \cos \delta \cos \lambda = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2 Giải bài toán động học ngược

Bài toán đặt ra là cho biết chuyển động quay của khâu CDE (khâu tác động cuối) $\delta = \delta(t)$,

Yêu cầu tìm góc quay của khớp $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$.

Ở đây ta cần tìm góc quay của khâu dẫn, và các tọa độ suy rộng dư $\mathbf{q} = [\varphi(t) \quad \beta(t) \quad \gamma(t) \quad \lambda(t)]^T$

Đạo hàm phương trình liên kết (3.3.4) theo thời gian ta được:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \alpha - l_2 \dot{\beta} \sin \beta \sin \gamma + l_2 \dot{\gamma} \cos \beta \cos \gamma = 0 \\ \dot{f}_2 &= -l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \alpha + l_2 \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma + l_2 \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma - l_3 \dot{\delta} \cos \delta = 0 \\ \dot{f}_3 &= h - l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + l_2 \dot{\gamma} \sin \gamma + l_3 \dot{\delta} \sin \delta = 0 \\ \dot{f}_4 &= \sin \alpha \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \gamma \sin \lambda - \sin \alpha \dot{\gamma} \cos \beta \cos \gamma \sin \lambda - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \lambda + \cos \alpha \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \gamma \sin \lambda \\ &\quad + \cos \alpha \dot{\gamma} \sin \varphi \cos \gamma \sin \lambda + \cos \alpha \dot{\lambda} \sin \varphi \sin \gamma \cos \lambda + \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \lambda + \dot{\lambda} \cos \gamma \sin \lambda = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Từ hệ phương trình (3.4.4) ta rút ra được các ma trận Jacobi:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_q &= \begin{bmatrix} l_1 \cos \varphi \sin \alpha & -l_2 \sin \beta \sin \gamma & l_2 \cos \beta \cos \gamma & 0 \\ l_1 \cos \varphi \cos \alpha & l_2 \cos \beta \sin \gamma & l_2 \sin \beta \cos \gamma & 0 \\ -l_1 \sin \varphi & 0 & l_2 \sin \gamma & 0 \\ 0 & (\sin \beta \sin \gamma \sin \lambda \sin \alpha + \cos \beta \sin \gamma \sin \lambda \cos \alpha) & (-\cos \beta \cos \gamma \sin \lambda \sin \alpha + \sin \beta \cos \gamma \sin \lambda \cos \alpha + \sin \gamma \cos \lambda) & (-\cos \beta \sin \gamma \cos \lambda \sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma \cos \lambda \cos \alpha + \cos \gamma \sin \lambda) \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_x &= \begin{bmatrix} 0 \\ -l_3 \cos \delta \\ l_3 \sin \delta \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Theo (2.4) ta có công thức xác định vận tốc các khớp:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x \dot{x} \quad (3.6)$$

Theo (1.6) ta tính được đạo hàm các ma trận Jacobi theo thời gian:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_q &= \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \alpha & -l_2 \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_2 \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma & \dots \\ l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \alpha & -l_2 \dot{\beta} \sin \beta \sin \gamma + l_2 \dot{\gamma} \cos \beta \cos \gamma & \dots \\ -l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi & 0 & \dots \\ 0 & (\dot{\beta}(\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha) \sin \gamma \sin \lambda \\ & + \dot{\gamma}(\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha) \cos \gamma \sin \lambda + \dots \\ & \dot{\lambda}(\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha) \sin \gamma \cos \lambda) \\ \dots & -l_2 \dot{\beta} \sin \beta \cos \gamma - l_2 \dot{\gamma} \cos \beta \sin \gamma & 0 \\ \dots & l_2 \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_2 \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma & 0 \\ \dots & l_2 \dot{\gamma} \cos \gamma & 0 \\ \dots & \dot{\beta}(\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha) \cos \gamma \sin \lambda & \dot{\beta}(\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha) \sin \gamma \cos \lambda \\ \dots & + \dot{\gamma}(\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha) \sin \gamma \sin \lambda + \dot{\gamma} \cos \gamma \cos \lambda & + \dot{\gamma}(-\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha) \cos \gamma \cos \lambda - \dot{\gamma} \sin \gamma \sin \lambda \\ & + \dot{\lambda}(-\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha) \cos \gamma \cos \lambda - \dot{\lambda} \sin \gamma \sin \lambda & + \dot{\lambda}(\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha) \sin \gamma \sin \lambda + \dot{\lambda} \cos \gamma \cos \lambda \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_x &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_3 \dot{\delta} \sin \delta \\ l_3 \dot{\delta} \cos \delta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Theo (2.8) ta có công thức xác định gia tốc các khớp:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}_q^{-1}(\mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}_q \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}}) \tag{3.8}$$

Áp dụng phương pháp Newton_Raphson cải tiến ta lần lượt tính được tọa độ, vận tốc, và gia tốc các tọa độ suy rộng với các giá trị tham số của cơ cấu như sau:

$$h = 15\text{cm}, l_1 = 18\text{cm}, l_2 = 40\text{cm}, l_3 = 22\text{cm}, d = 20\text{cm}, e = 15\text{cm}, \alpha = 45^\circ (0.7854)$$

Bộ thông số đầu được chọn như sau

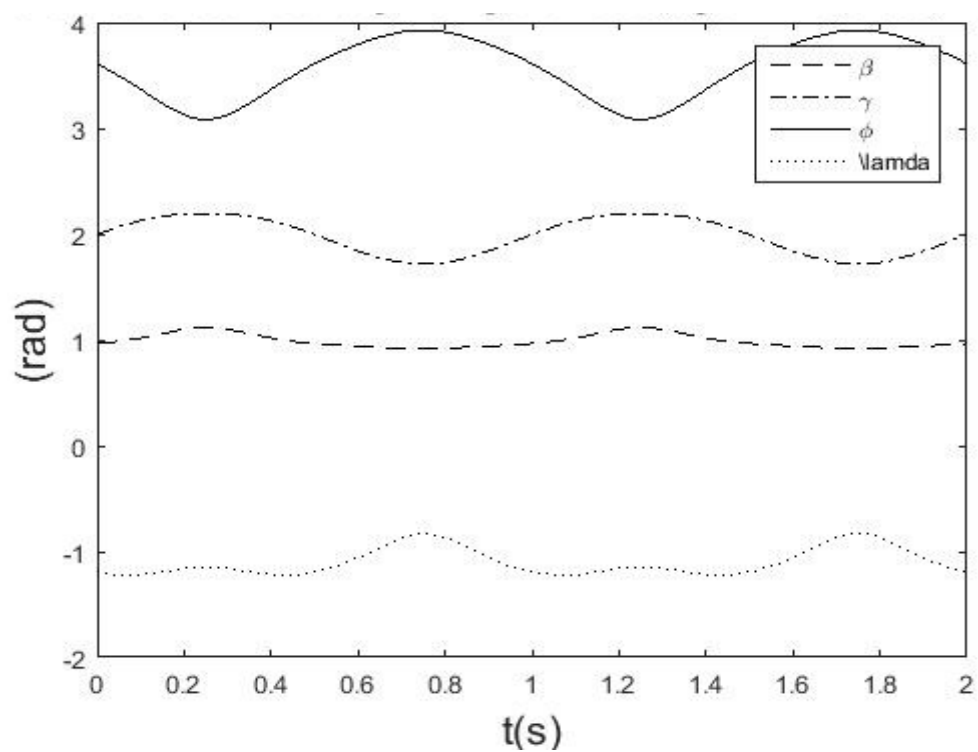
$$\varphi_0 = 30^\circ (0.5236\text{rad}), \beta_0 = 1.3434(\text{rad}), \gamma_0 = 0.5214(\text{rad}), \delta_0 = 1.2789(\text{rad})$$

Quy luật chuyển động của khâu cuối:

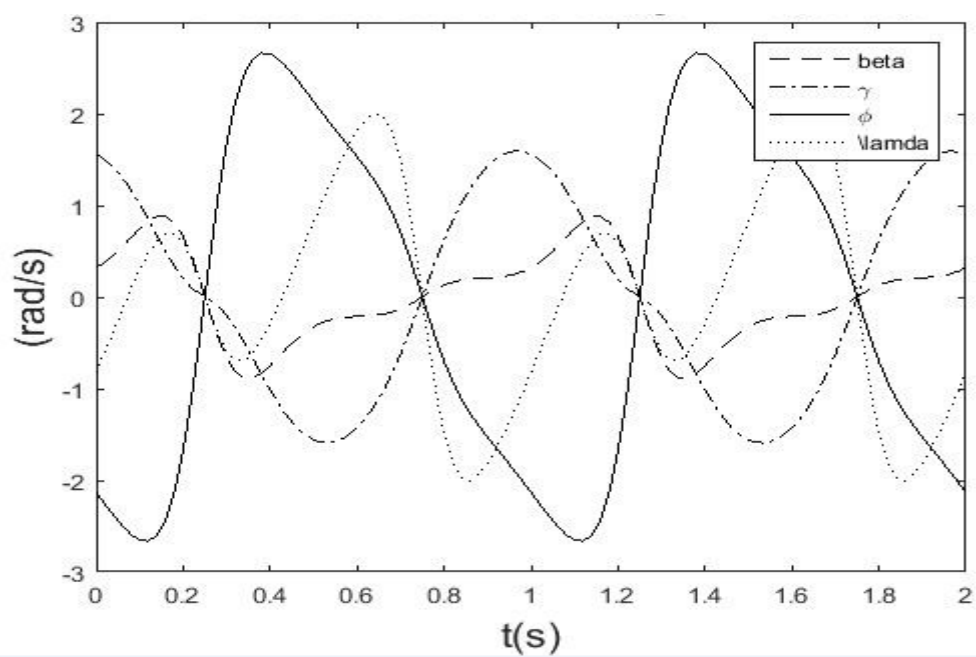
$$\delta = 0.79680 + 0.4 \cos(2\pi \cdot t + 0.5\pi);$$

Sử dụng phần mềm Matlab ta dễ dàng giải bài toán động học ngược cơ cấu không gian có khớp Cardan. Một số kết quả được trình bày trên các đồ thị hình 1.46 –

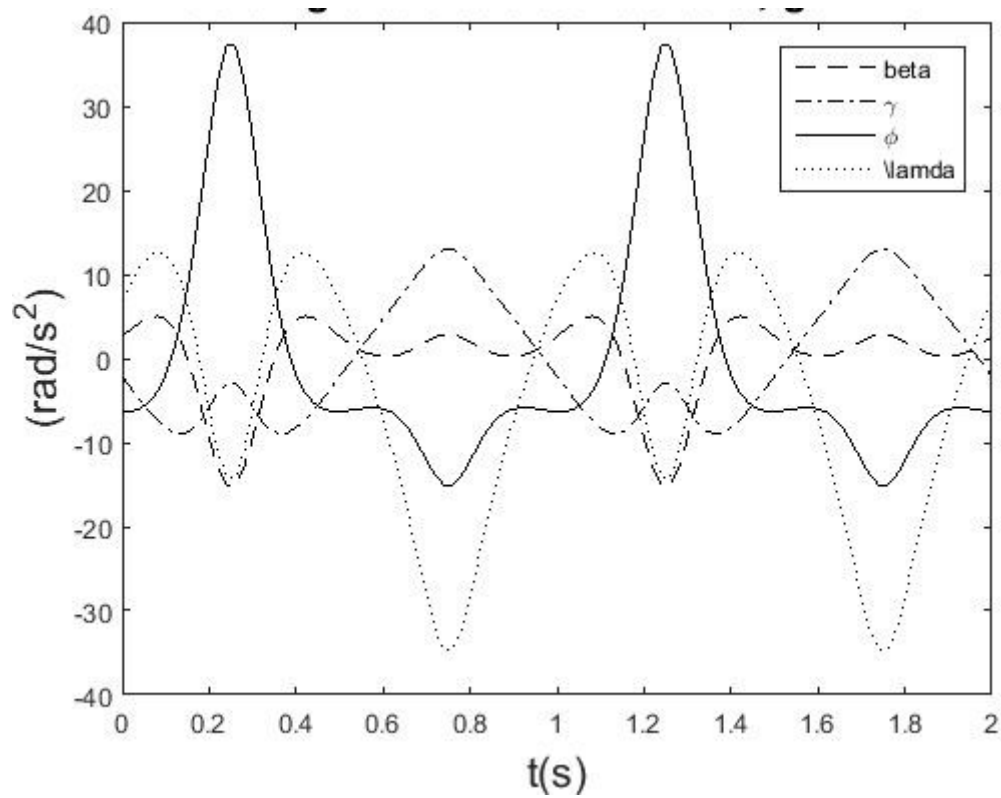
hình 1.49



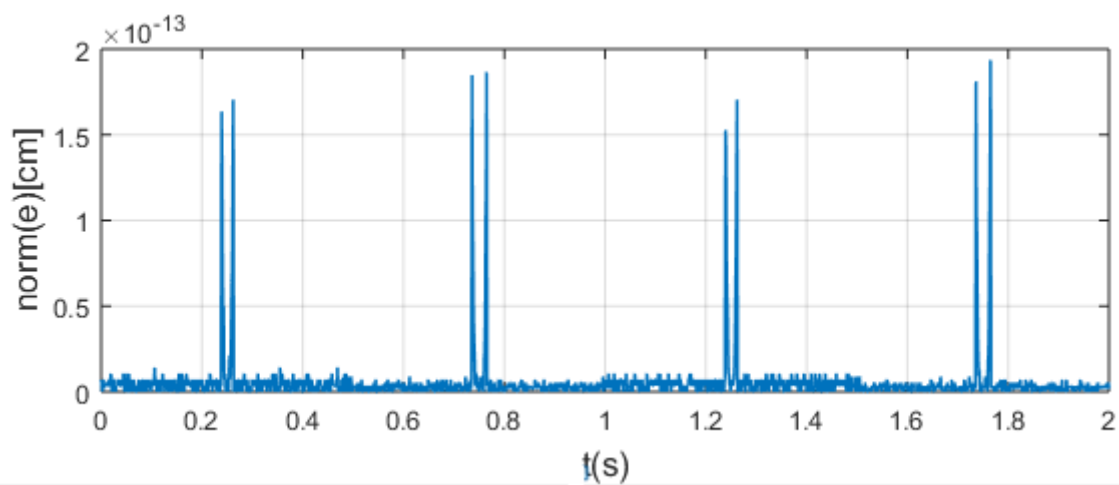
Hình 2 Đồ thị các tọa độ của φ β γ λ



Hình 3 Đồ thị vận tốc của φ β γ λ



Hình 4 Đồ thị gia tốc của φ β γ λ



Hình 5 Sai số phương trình liên kết